

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROJETO DE PESQUISA

PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSAS DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA (PIBIC) E PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSAS DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA NAS AÇÕES AFIRMATIVAS (PIBIC-Af) 2021

UNIDADE PROPONENTE

Campus:
CÂMPUS URUACU

IDENTIFICAÇÃO DO PROJETO

Título do Projeto:
Cônicas Esféricas

Grande Área de Conhecimento:
CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA

Área de Conhecimento:
MATEMÁTICA

Período de Execução:
Início: 06/08/2021 | Término: 16/08/2022

Nome do Responsável

(Coordenador):
Hiuri Fellipe Santos
dos Reis

Titulação:
DOUTORADO

Matrícula:
1389300

Vínculo:
Voluntário

Departamento de Lotação:
URU-DAA

Telefone:
/ (62) 3357-8178 (ramal: 8178), (62) 3357-
8175 (ramal: 8175)

E-mail:
hiuri.reis@ifg.edu.br

EQUIPE PARTICIPANTE

Professores e/ou Técnicos Administrativos do IFG

Membro	Contatos	Vínculo	Titulação
Nome: Hiuri Fellipe Santos dos Reis	Tel.: / (62) 3357-8178 (ramal: 8178), (62) 3357- 8175 (ramal: 8175)	Voluntário	DOUTORADO
Matrícula: 1389300	E-mail: hiuri.reis@ifg.edu.br		

Estudantes do IFG

Membro	Contatos	Vínculo	Curso
Nome: Geovana Rodrigues Matias	Tel.: -	Voluntário	Bacharelado em Engenharia Civil
Matrícula: 20191050070052	E-mail: geovana.matias@academico.ifg.edu.br		
Nome: Adria Dutra Cunha	Tel.: -	Bolsista	Bacharelado em Engenharia Civil
Matrícula: 20191050070249	E-mail: dutra.cunha@academico.ifg.edu.br		

DISCRIMINAÇÃO DO PROJETO

Resumo

As cônicas esféricas são curvas da geometria elíptica obtidas pela interseção da esfera com um cone circular reto. Como elemento da geometria elíptica, as cônicas esféricas representam uma interessante classe de curvas que são importantes para desenvolvimento e a compreensão dessa geometria. Nesse sentido, o presente projeto, propõe fazer um estudo das cônicas esféricas, visando encontrar suas caracterizações e descrever suas propriedades geométricas. Para isso, será analisado os traços dessas curvas obtidos pelo *software* Geogebra e realização de estudo bibliográfico dessa teoria. Pretende-se com esta pesquisa um melhor entendimento das características geométricas e analíticas das cônicas esféricas.

Apresentação/Justificativa

A teoria das cônicas na geometria Euclidiana é um assunto bem conhecido e está presente em vários livros de geometria clássica. As cônicas Euclidianas começaram a ser estudadas na Grécia antiga e teve como principais estudiosos Euclides, Arquimedes e Menaecmus. A História indica que as cônicas foram descobertas por Menaecmus (380-320 a.C.) quando tentava resolver os três problemas famosos da Geometria grega: a trissecção do ângulo, a duplicação do cubo e a quadratura do círculo. Ele foi o primeiro a definir as cônicas como a interseção de uma superfície cônica circular reta com um plano (EVES, 2004).

Na geometria Euclidiana as cônicas são classificadas da seguinte forma, a elipse, sendo a curva obtida pela intersecção do cone com um plano que corta todas as suas geratrizes, a parábola como a intersecção do cone com um plano paralelo a uma geratriz e a hipérbole definida pela interseção do cone com um plano que corta as suas duas folhas. As cônicas podem ser obtidas como o lugar geométrico do plano que satisfaz as seguintes propriedades: a elipse sendo o conjunto dos pontos cuja soma da distância a dois pontos fixos é constante; a parábola é dada pelos pontos cuja distância a um ponto fixo é igual a distância a uma reta fixa; a hipérbole é o lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias a dois pontos fixados é constante. Outra caracterização das cônicas é o conjunto do plano Cartesiano cujas coordenadas são soluções de uma equação quadrática (AKOPYAN & ZASLAVSKY, 2007).

As aplicações das cônicas se dão nos mais variados segmentos, como na aplicação apontada pelo físico alemão Johannes Kepler, o qual mostrou que a órbita descrita pelos planetas é na forma elíptica, sendo o Sol um dos focos. Um objeto, atirado de forma oblíqua, descreve uma parábola, assim como a água que jorra de um bebedouro. Outro exemplo interessante pode ser constatado ao observar a antena parabólica, ela recebe os sinais nas parábolas e os direciona para um único ponto, o foco, que faz a ampliação e transmissão dos dados. Na engenharia civil, temos o hiperboloide (sólido originado da rotação de uma hipérbole) que é utilizado na construção de torres de refrigeração de usinas nucleares. A estrutura nesse formato permite uma minimização dos ventos transversais e mantém a integridade da estrutura (PEREIRA FILHO, 2015).

A geometria não euclidiana, consiste em duas geometrias baseadas em um sistema axiomático distinto da geometria euclidiana, elas são obtidas ao trocar o quinto axioma de Euclides, sobre as retas paralelas, pela sua negação. O quinto axioma afirma que por um ponto exterior a uma reta passa exatamente uma reta paralela à inicial. Assim, existem duas maneiras de negar essa afirmação, sendo a primeira afirmando que por um ponto exterior a uma reta passa no mínimo duas retas paralelas à inicial. Usando essa afirmação, no lugar do quinto axioma de Euclides, temos a geometria hiperbólica, que tem como um de seus modelos o disco de Poincaré (CARMO, 1987).

A segunda maneira, é afirmar que por um ponto exterior a uma reta não passa nenhuma reta paralela à inicial. Adotando essa afirmação no lugar do quinto axioma de Euclides, obtemos a geometria elíptica ou esférica. Essa geometria tem como um de seus modelos a esfera, onde as curvas que fazem o papel de retas, estabelecem a menor distância entre dois pontos, são as geodésicas, a exemplo do equador e os meridianos em um globo terrestre (CARMO, 1987).

A distância entre dois pontos é necessariamente o menor comprimento das trajetórias que os ligam. Na esfera, a trajetória com menor comprimento que liga dois de seus pontos é o arco de círculo com raio igual ao da esfera. Essas trajetórias são denominadas geodésicas e possuem o mesmo papel de minimizar distâncias que as retas possuem na geometria euclidiana. Como duas geodésicas quaisquer de uma esfera sempre se intersectam, elas satisfazem a propriedade das paralelas, isto é, a um ponto exterior a uma geodésica (reta) não passa nenhuma geodésica paralela a inicial. Existem várias propriedades da geometria esférica que são diferentes da geometria euclidiana, por exemplo, na geometria euclidiana a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , no que se refere a geometria esférica, a soma dos ângulos internos de um triângulo sempre será maior que 180° . Além disso, na geometria esférica dois triângulos semelhantes são sempre congruentes (LENART, 2003).

Existem aplicações da geometria esférica em diversas áreas, na matemática, na física, na astronomia, na cartografia e na navegação, dentre outras. Uma aplicação importante diz respeito a uma associação com o globo terrestre, conceitos geográficos como paralelos, meridianos, latitude, longitude e fusos horários são baseados nessa geometria. O GPS utiliza propriedades da geometria esférica para encontrar qualquer ponto sobre a superfície terrestre. Graças a ele,

atualmente, a navegação de aviões e navios é muito segura pela alta precisão de localização deste aparelho (ZANELLA, 2013).

Para o desenvolvimento de uma geometria é necessário compreender a estrutura dos elementos presentes nela. Tal compreensão possibilita sua aplicação em diferentes áreas do conhecimento, contribuindo para o aperfeiçoamento do conhecimento científico, de maneira que sua aplicabilidade possa se materializar em diversos produtos e serviços.

Uma classe especial de curvas da geometria esférica são as cônicas esféricas, elas são geradas pela intersecção do cone circular reto com a esfera. Ao mesmo tempo que a teoria das cônicas euclidianas são bem conhecidas, raramente se fala sobre as cônicas esféricas. Além disso, as poucas referências que tratam desse assunto, normalmente usam linguagem e ferramentas muito avançadas.

Para a compreensão dessas curvas e para o desenvolvimento da geometria esférica, cabe fazer os seguintes questionamentos, Quais as propriedades que as cônicas esféricas possuem que são semelhantes às cônicas euclidianas? Qual o sistema de coordenadas na esfera em que as cônicas esféricas são dadas como soluções de equações quadráticas? Qual classe de cônica esférica teremos se, levarmos em consideração o que acontece com a elipse euclidiana, onde o conjunto de pontos na esfera cuja soma da distância a dois pontos fixos é constante? Quais são as cônicas esféricas que são obtidas pela diferença da distância entre dois pontos fixos? Dado um ponto e uma geodésica na esfera, os pontos cuja distância ao ponto fixo é igual à distância a geodésica, caracteriza quais cônicas esféricas? Quais as equações paramétricas das cônicas esféricas? As imagens das cônicas esféricas pela projeção estereográfica determina quais curvas no plano euclidiano?

Diante do contexto apresentado, o presente projeto propõe fazer uma análise das cônicas esféricas, apresentando as parametrizações e os traços dessas curvas. Além disso, pretende-se caracterizar essas curvas por uma equação quadrática e classificá-las de acordo com as propriedades geométricas que elas satisfazem na esfera. Via projeção estereográfica, pretendemos associá-las a uma classe de curvas no plano euclidiano

Fundamentação Teórica

O estudo da geometria não euclidiana nasceu na busca por uma prova para o quinto axioma, um de seus principais trabalhos é o do padre Girolamo Saccheri (1667-1733), que publicou um opúsculo no qual pretendia ter demonstrado o quinto postulado pelo método de redução ao absurdo. Anos mais tarde descobriram a impossibilidade de provar o quinto axioma de Euclides, e que este independia dos demais axiomas. Os principais matemáticos que contribuíram para essa descoberta foram Gauss (1777-1855), Bolyai (1802-1860) e Lobachsvsky (1793-1856).

Em 1829, Lobachevsky, a partir dos quatro primeiros axiomas e utilizando a afirmação de que por um ponto qualquer fora de uma reta é possível traçar pelo menos duas retas paralelas à reta dada. Construiu um sistema geométrico satisfatório, sem qualquer contradição, conhecido hoje como geometria hiperbólica, essa foi a primeira geometria não euclidiana. Após a geometria hiperbólica, em uma aula inaugural para sua admissão como professor-adjunto na Universidade de Gottingen, Bernhard Riemann (1826-1866) apresenta pela primeira vez a geometria esférica.

Desde então, a geometria não Euclidiana instiga a curiosidade de muitos matemáticos, sendo uma área muito explorada desde sua descoberta. No Brasil, um dos pioneiros a estudar esse assunto foi Manfredo do Carmo (1928-2018), ele publicou diversos trabalhos sobre imersões na esfera e no espaço hiperbólico. Além disso, ele difundiu e divulgou a geometria não Euclidiana no Brasil, tendo como um de seus trabalhos o artigo “Geometrias não-euclidianas” publicado na Revista Matemática Universitária (Carmo, 1987).

Outro trabalho que trata desse assunto publicado em 2019 é o artigo intitulado *Soliton solutions to the curve shortening flow on the sphere* (Reis & Tenenblat, 2019), onde caracteriza e descreve uma classe especial de curvas da geometria esférica que não sofrem deformação pelo fluxo redutor de curvas. Na mesma linha desse trabalho, Nunes da Silva e Tenenblat (2021), classificaram e descreveram as curvas da geometria hiperbólica que são invariantes pelo fluxo redutor de curva. Os primeiros estudos sobre cônicas esféricas se deve a Chasles, em seu trabalho, apresenta vários resultados sobre os cones quadráticos e interpretou esses resultados para as cônicas esféricas, descrevendo assim várias propriedades geométricas dessas curvas (CHALES, 1841).

Utilizando uma abordagem analítica, por meio de um sistema de coordenadas, Sykes e Peirce (1877) mostraram que, assim como acontece com as cônicas euclidianas, as cônicas esféricas são caracterizadas como solução de uma equação quadrática, essa abordagem permitiu caracterizar analiticamente as cônicas esféricas. Uma análise projetiva das cônicas não euclidiana foi desenvolvida por Story (1883). Utilizando métodos projetivos ele encontrou formas canônicas para as cônicas esféricas e hiperbólicas. Por fim, destaca se o trabalho feito por Izmestiev (2017), que teve como objetivo fazer um levantamento das principais propriedades das cônicas não Euclidianas, baseando seu trabalho principalmente nas obras de Charles e Story, ele descreveu e classificou as cônicas esféricas e hiperbólicas.

Objetivo Geral

Analisar as cônicas esféricas, a fim de descrever suas propriedades geométricas, para que seja possível realizar uma caracterização analítica e uma classificação geométrica dessas curvas.

Objetivos específicos

- Identificar as curvas obtidas pela interseção do cone circular reto com a esfera.
- Deduzir as equações paramétricas para as cônicas esféricas.
- Determinar um sistema de coordenadas e a equação que caracteriza as cônicas esféricas.
- Classificar as cônicas esféricas determinadas pelo lugar geométrico cuja soma da distância a dois pontos fixos é constante.
- Classificar as cônicas esféricas determinadas pelo lugar geométrico cuja diferença da distância a dois pontos fixos é constante.

- Classificar as cônicas esféricas determinadas pelo lugar geométrico cuja distância a um ponto fixo é igual à distância a uma geodésica fixa.
- Determinar a imagem da projeção estereográfica das cônicas esféricas no plano euclidiano.

Metas

- 1 - Estudo da Geometria Esferica
- 2 - Estudos das caracterizações das cônicas esféricas
- 3 - Relatório Parcial
- 4 - Análise geométrica das cônicas esféricas
- 5 - Pesquisa sobre aplicações das cônicas esféricas
- 6 - Relatório Final

Materiais e Métodos

Para a realização dessa pesquisa será feita uma análise bibliográfica, com o intuito de definir um sistema de coordenadas para a esfera, onde as cônicas esféricas são dadas como soluções das equações quadráticas e realizar sua classificação a partir das propriedades geométricas encontradas.

A partir da utilização do *software* gratuito Geogebra, será feita a identificação das interseções da esfera com o cone circular reto, para que seja possível visualizar as cônicas esféricas.

A partir da parametrização das cônicas esféricas e com o auxílio do *software* Geogebra, será esboçado o traço dessas curvas. A partir dessa parametrização será aplicado a projeção estereográfica nas cônicas esféricas, o que possibilitará classificar as curvas obtidas no plano por essa projeção.

Após a análise e o levantamento bibliográfico das cônicas esféricas, pretendemos determinar como essas curvas são aplicadas outras áreas do conhecimento.

Cronograma de execução

Atividades/Mês	ago	set	out	nov	dez	jan	fev	mar	abr	mai	jun	jul	ago
Reunião para orientação	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Pesquisa Bibliográfica	X												
Estudo da geometria esférica	X	X											
Estudo sobre sistemas de coordenadas na esfera		X	X										

Atividades/Mês	ago	set	out	nov	dez	jan	fev	mar	abr	mai	jun	jul	ago
Caracterizações das cônicas esféricas por sistemas de coordenadas			X	X	X								
Relatório Parcial						X							
Análise das interseções do cone com a esfera							X						
Dedução das parametrizações das cônicas esféricas							X	X					
Estudo das propriedades geométricas das cônicas esféricas								X	X	X			
Pesquisa das aplicações das cônicas esféricas											X		
Relatório final												X	X

Resultados Esperados

Com essa pesquisa espera-se compreender, caracterizar e classificar as curvas esféricas através de um sistema de coordenadas especiais. Pretende-se encontrar uma equação quadrática que caracteriza essas curvas e realizar sua classificação a partir das propriedades geométricas encontradas. Visa-se a produção de um material em português, uma vez que, pelo levantamento bibliográfico feito até o momento, não encontramos nenhuma referência bibliográfica nessa língua sobre o assunto, o que possibilitará maior circulação de conhecimento entre estudantes da área que não dominam a língua inglesa. Do ponto de vista científico: a relevância do projeto se concentra na formação de recursos humanos especializados em geometria esférica e no aumento do conhecimento matemático. Como forma de divulgação científica e de fortalecimento da instituição ao qual o projeto é vinculado, pretende-se apresentar o resultado em eventos, bem como a publicação científica, na forma de trabalho completo.

Referências Bibliográficas

- AKOPYAN, A.; ZASLAVSKY, A. **Geometry of conics**, volume 26 of Mathematical World. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- CARMO, M. **Geometrias Não Euclidianas**. Revista Matemática Universitária. Rio de Janeiro, 1987.
- CHALES, M. **Two geometrical memoirs on the general properties of cones of the second degree, and on the spherical conics**. Dublin : For Grant and Bolton, 1841.
- EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Editora da Unicamp. Campinas, 2004.
- IZMESTIEV, I. **Spherical and hyperbolic conics**. Arxiv1702.066860v1. 2017.
- LENART, I. **Non-Euclidean Adventures on the Lenart Sphere: Activities Comparing Planar and Spherical Geometry**. Press Curriculum Chave, 2003
- NUNES DA SILVA, F., TENENBLAT, K., **Soliton Solutions to the Curve Shortening Flow on the 2-dimensional hyperbolic plane**. Arxiv2101.07916, 2017.
- PEREIRA FILHO, A., **Aplicações das cônicas**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2015.

REIS, H.; Tenenblat, K. **Soliton solutions to the curve shortening flow on the sphere**, Proc. Amer. Math. Soc., v. 147, 4955-4967, 2019.

STORY, W., **On Non-Euclidian properties of conics**. Am. J. Math., 5:358–382, 1883.

SYKES, G.; PEIRCE, B. **Spherical conics**. Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, 13:375–395, 1877.

ZANELLA, I. A. **Geometria esférica: uma proposta de atividades com aplicação**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina-PR, 2013.

CRONOGRAMA DE EXECUÇÃO

Meta Atividade	Especificação	Indicador(es) Qualitativo(s)	Indicador Físico		Período de Execução		
			Unid.de Medida	Qtd.	Início	Término	
1	1	Pesquisa bibliográfica Foi feito o levantamento bibliográfico dos principais artigos sobre o assunto.	Identificação de bibliografias que aboedam as geometria esferica			Previsto para 06/08/2021 Iniciado em 06/08/2021	Previsto para 20/08/2021 Concluído em 20/08/2021
1	2	Análise das bibliografias O estudo da geometria na esfera foi executado com sucesso e foi desenvolvido o texto que é o primeiro capítulo do trabalho.	Compreensão da teoria sobre geometria esférica			Previsto para 20/08/2021 Iniciado em 20/08/2021	Previsto para 24/09/2021 Concluído em 24/09/2021
1	3	Estudo sobre sistemas de coordenadas na esfera Estudamos os sistemas de coordenadas da esfera e do cone. Também estudamos as equações explícitas dessas superfícies. Agora usaremos essas equações para encontrar as parametrizações das cônicas esféricas e apresentar seu traço.	Compreende os diferentes sistemas de coordenadas que podemos colocar na esfera			Previsto para 25/09/2021 Iniciado em 25/09/2021	Previsto para 29/10/2021 Concluído em 29/10/2021
2	1	Análise das cônicas esféricas por sistemas de coordenadas Devido a complexidade dessa atividade, por exigir conteúdos e técnicas de demonstração que as orientadas ainda não dominam, decidimos deixar essa atividade para ser desenvolvida no final do projeto.	Encontrar um sistema de coordenadas onde as cônicas esféricas são caracterizadas como solução de uma equação quadrática.			Previsto para 30/10/2021 Iniciado em 30/10/2021	Previsto para 31/12/2021 Concluído em 31/12/2021
3	1	Escrita do Relatório Parcial As orientandas escreverem e entregaram o relatório parcial dentro do prazo determinado.	Entrega do relatório parcial dentro do prazo			Previsto para 01/01/2022 Iniciado em 01/01/2022	Previsto para 21/01/2022 Concluído em 21/01/2022

Meta Atividade	Especificação	Indicador(es) Qualitativo(s)	Indicador Físico		Período de Execução	
			Unid.de Medida	Qtd.	Início	Término
3	2	Revisão do relatório parcial O relatório parcial foi revisado e encontra em anexo.	Correção e envio do relatório parcial			Previsto para 31/01/2022 Iniciado em 22/01/2022 Concluído em 31/01/2022
4	1	Análise das interseções do cone com a esfera A intersecção das superfícies foram analisadas as curvas foram plotadas com o auxílio do programa Geogebra.	Obter imagens visuais das cônicas esféricas			Previsto para 15/02/2022 Iniciado em 01/02/2022 Concluído em 15/02/2022
4	2	Dedução das parametrizações das cônicas esféricas Com a análise das intersecções entre o cone e a esfera obtemos as parametrizações das cônicas esféricas.	Obter as parametrizações e o traço das cônicas esféricas			Previsto para 18/03/2022 Iniciado em 16/02/2022 Concluído em 18/03/2022
4	3	Estudo das propriedades geométricas das cônicas esféricas O estudo das propriedades geométricas das cônicas esféricas foram realizados com sucesso.	Classificar as cônicas esféricas de acordo com suas características geométricas			Previsto para 31/05/2022 Iniciado em 19/03/2022 Concluído em 31/05/2022
5	1	Pesquisa sobre aplicações das cônicas esféricas	Encontrar onde as cônicas esféricas podem ser aplicadas			01/06/2022 30/06/2022
6	1	Escrita do relatório Final	Entrega do relatório final entro do prazo			01/07/2022 01/08/2022
6	2	Revisão do relatório final	Correção e entrega do relatório final			02/08/2022 16/08/2022

PLANO DE APLICAÇÃO

Classificação da Despesa	Especificação	PROPPG (R\$)	DIGAE (R\$)	Campus Proponente (R\$)	Total (R\$)
TOTAIS		0	0	0	0

Anexo A

MEMÓRIA DE CÁLCULO

CLASSIFICAÇÃO DE DESPESA	ESPECIFICAÇÃO	UNIDADE DE MEDIDA	QUANT.	VALOR UNITÁRIO	VALOR TOTAL
TOTAL GERAL					-